

L'éducation en mathématiques

A) L'activité en mathématiques et ses finalités

1. Organisation générale des séances

Les orientations qui suivent sont directement tirées du texte officiel édité par *Eduscol*, dans la partie relative au *Socle commun de connaissances et de compétences, Outils pour l'évaluation des compétences au collège, Vade-mecum*, mis à jour 13 juillet 2010. Nous-nous sommes contentés de répartir les consignes entre les différentes séances telles qu'elles sont prévues et dont l'organisation est exactement adaptée aux directives de ce texte.

- Séance Entretien et recherche individuelle

Pour donner du sens aux mathématiques enseignées et cultiver chez les élèves le goût de faire des mathématiques, les programmes recommandent d'introduire certaines notions au travers d'une situation-problème. L'intérêt de cette démarche est de montrer la pertinence de l'outil construit pour la résolution du problème.

Les situations choisies dans ce cadre doivent permettre à tout élève de s'engager avec ses acquis du moment et donc, ne reposer que sur des consignes simples, n'exiger que des connaissances solidement acquises. Chaque élève est ainsi conduit à exercer les aptitudes dont il dispose et à en identifier les limites.

- Séance en Groupe d'étude

La mutualisation des différentes procédures apparues dans la classe permet de présenter dans les meilleures conditions le savoir nouveau visé en lui donnant toutes les chances d'être perçu comme utile voire indispensable. Les élèves sont ainsi en état de le recevoir puis de se l'approprier.

- En atelier

Il y aura deux types d'ateliers selon les notions abordées : des séances d'entraînement propres à la matière avec des exercices selon le niveau et les besoins de chacun, des séances interdisciplinaires durant lesquelles les élèves utilisent les notions vues en mathématiques dans d'autres matières.

2. Principes généraux

- Rappel des orientations officielles

Pour gérer la double exigence du programme et du socle commun et faire cohabiter harmonieusement tous les objectifs de formation visés, il est essentiel de veiller à ce que ce type de problème offre une véritable activité mathématique à tout élève sans oublier celui qui n'accèdera peut-être pas à la modélisation ou à la stratégie experte visée.

- Compétences requises du socle commun et intéressant l'enseignement des mathématiques

Compétence 1 : Lire, écrire (en entretien et recherche individuelle, en atelier). S'exprimer à l'oral (en groupe d'étude).

Compétence 3 : Pratiquer une démarche scientifique et technologique, résoudre des problèmes, savoir utiliser des connaissances et des compétences mathématiques, savoir utiliser des connaissances dans divers domaines scientifiques.

Compétence 4 : S'approprier un environnement informatique de travail, communiquer, échanger.

Compétence 7 : Etre capable de mobiliser ses ressources intellectuelles et physiques dans diverses situations, faire preuve d'initiatives.

- Les types d'exercices

Dans les manuels scolaires, et parfois sous des appellations différentes, quatre séries d'exercices sont proposées : des exercices pour démontrer, des exercices pour chercher et pour appliquer, des exercices d'introduction des connaissances et des exercices pour s'entraîner.

Dans la plupart des manuels, ils sont présentés dans cet ordre. Si nous voulons être conformes aux textes officiels et à l'objectif du collège expérimental, il est évident que les exercices d'introduction des connaissances et les exercices pour chercher doivent survenir en premier dans la séance d'entretien et recherche individuelle. Les exercices pour démontrer pourraient prendre place dans la séance de mutualisation, à titre conclusif. Les exercices pour s'entraîner et appliquer seraient l'objectif des ateliers et des clubs à vocation scientifique.

- Le suivi des acquis (*propos inspiré des écrits de Clause Beaunis, site Freinet, juillet 2003*)

Davantage que dans les disciplines littéraires où l'imprégnation par la langue est un processus de longue durée à base de répétition diversifiée, l'acquisition des mathématiques suppose une construction plus méthodique et plus précisément jalonnée. Le suivi assuré par le collège expérimental est très adapté à cette nécessité par ce qu'il propose une individualisation des apprentissages.

Il serait envisageable de créer des « brevets » sur des notions précises où le professeur appose son appréciation (acquis, non acquis, etc.). Les élèves ont la possibilité de repasser ces brevets. De cette façon, ceux qui sont en difficulté peuvent revenir sur une notion mal comprise et ne pas rester sur un échec.

Sur le brouillon, dont il sera demandé une organisation stricte, devront figurer une « fiche d'apprentissage » comprenant la recherche et la démonstration d'une notion précise, des exemples illustratifs, des exercices d'application qui seront autant de tests autocorrectifs. Sur la base de l'analyse de ces fiches, des « brevets » correspondants seront attribués, validant ou non l'acquisition de la notion. En cas de difficulté pour l'acquiescer, il devra reprendre sa fiche d'apprentissage ou une nouvelle, mais au contenu similaire, jusqu'à la réussite.

Ces documents ouvrent cette possibilité, par exemple en cours mutuel : on se met par deux ou trois en fonction des besoins de chacun, pour travailler sur une notion. On l'étudie ensemble et, si l'on ne comprend pas, soit on demande de l'aide à quelqu'un qui a déjà son brevet, soit on demande au professeur. On fait les exercices chacun de son côté ; on compare et discute, on corrige soit collectivement, soit avec le professeur.

En fonction des résultats, les élèves élaborent un plan de travail pour la semaine.

Si nécessaire, une leçon peut survenir sur une quinzaine de minutes.

Ainsi, les élèves prennent en charge leurs apprentissages. Mais, le professeur devra veiller à laisser vivre une construction réelle des savoirs. Il ne s'agit pas d'apprendre et de reproduire des notions et des situations exclusivement jalonnées par l'enseignant.

- L'individualisation en mathématiques (*à partir de Piaget, Freinet, Charpak*)

Elle repose sur des observations des processus d'apprentissage qui énoncent que la meilleure voie de l'acquisition des savoirs n'est nullement l'explication ou la démonstration mais le tâtonnement expérimental, par l'expérience. Étudier d'abord les lois, c'est placer la charrue devant les boeufs.

D'autre part, les personnes ne se sentent pas à l'aise dans le travail uniforme collectif. Elles s'accommodent mieux du travail individuel au sein d'une communauté pour aboutir à un résultat d'équipe coopératif où chacun aura offert sa part à l'ensemble.

Des propositions de « situations problèmes » peuvent donc jouer un grand rôle dans cette approche : énigmes mathématiques, rallyes problèmes de logique, dessins géométriques à reproduire, problèmes de numération, etc.

Pour introduire ces « situations problèmes », les manuels scolaires en contiennent en nombre largement suffisant. Mais le professeur pourrait en tirer des fiches avec, d'un côté, l'exposé de la situation et, de l'autre, des exercices reprenant, comme outils, les solutions trouvées. Pour pouvoir réaliser ces exercices, il faudrait évidemment avoir compris la démarche utilisée pour avancer dans la maîtrise de la situation.

L'idéal serait d'arriver à obtenir, de la part des élèves, la création de « situations problèmes » similaires et, mieux encore, les exercices qui vont avec. Dans ce cas, le réinvestissement des acquis apparaîtra comme très solide. Mais, comme il sera suggéré dans la partie suivante, la création pure, non cadrée, à partir de l'existence propre à chacun pourrait également permettre de mieux enraciner le langage mathématique dans les esprits et leur installer la conscience que les mathématiques sont en correspondance étroite avec le réel.

- La création en mathématiques (*Sources : mouvement Freinet, Paul Le Bohec*)

Pour parvenir à ces créations, il est nécessaire d'être pragmatique pour deviner quand le moment est venu d'apporter son interprétation. Dans cette séance, chaque création est examinée pour trouver ce qu'il y a de mathématique. Le créateur doit évidemment avoir la parole. Sur cette base, chacun note les versions des autres. Le professeur est là pour arbitrer, rectifier les erreurs de langage si elles ne sont pas corrigées par le groupe.

Le professeur doit cependant trier entre ce qui relève des mathématiques et de la graphomanie ou de la simple copie. Les notions mathématiques ne seront évidemment pas réinventées, sauf par une sorte de chance inespérée ou parce que l'on aurait affaire à un génie précoce. Mais, par contre, c'est l'occasion de mettre en place à la fois le vocabulaire courant des mathématiques et d'y introduire la réalité vécue.

Ainsi, à partir de l'affectivité, de l'existence, peut naître une sorte de sociabilité des mathématiques généralement perçues comme abstractions éloignées de la vie. C'est donc une approche que permet d'identifier des situations mathématiques réelles.

Voici une liste d'opérations et de termes qui peuvent être ainsi mis à jour :

- jeu de nombres permettant, par une suite d'opérations, de passer de l'un à l'autre.
- partager une feuille, une surface, etc. ; les fractions.
- passer d'une unité de mesure à l'autre (centimètres et pouces, par exemple).
- mesurer une étendue, quadrillage, repérage, échelles.
- tracer des formes, utiliser le double-décimètre, l'équerre, le compas.
- les ensembles inclus, séparés, à intersection.
- distinction entre chiffres et nombres.
- le sens du mot « signe ». La nécessité de suivre une convention d'écriture.
- la symétrie et la dissymétrie.
- les grands nombres et les petits nombres, leur rapport avec le temps.
- les signes : plus, moins et égal, plus petit que, plus grand que, etc.
- la décomposition d'un nombre.
- les lignes ouvertes, fermées, droites.
- définir le point.
- les parallèles, les différents volumes.
- traits et segments de droite.
- les angles droits, obtus, aigus, quelconques.
- les angles et les triangles.
- les formes d'ellipses, les arcs et les courbes.
- les polygones.
- les figures fermées, ouvertes.
- les critères du carré, du rectangle, du losange, le doublement du carré.
- l'usage des parenthèses, des virgules.
- diagonales et diamètres.

- point, forces, orientation (vecteurs).

Il serait à considérer que tout ce vocabulaire soit déjà acquis à l'entrée en sixième. Mais, il sera sans doute indispensable de revenir sur la trace et, à cette occasion, de l'enraciner dans la réalité, dans la conscience qu'ils définissent des aspects concrets de l'environnement. Les représentations mentales fausses ou approximatives ne disparaissent que dans la durée. Simultanément, les élèves comprennent que ce vocabulaire sert en constance. Dans un travail pluridisciplinaire, il est envisageable de le retrouver en français, dans les descriptions, par exemple, ou dans la logique grammaticale.

B) L'organisation des apprentissages (source : Hombeline Bader)

1. Pour les quatre niveaux :

- Sixième

Entretien et recherche individuelle	Cours mutuels	Ateliers
<ul style="list-style-type: none"> Algèbre. Partir d'une activité pour aborder les différentes notions qui sont à acquérir en algèbre. Faire le lien aussi souvent que possible avec d'autres disciplines pour que les élèves puissent voir l'utilité de ce qu'ils doivent savoir faire. <i>Exemples : la notion d'ordre de grandeur est utilisée en SVT, on place des nombres sur une droite graduée en histoire ...</i> Géométrie. On pourra découvrir les différentes figures à connaître au travers de problèmes de construction et mettre en évidence les propriétés de ces dernières. On travaillera par thème en géométrie et non en chapitres. <ul style="list-style-type: none"> ➤ Problèmes de construction <i>Médiatrice, bissectrice, les quadrilatères, les triangles, les cercles, la symétrie axiale</i> ➤ Initiation au raisonnement Apprendre à raisonner, à démontrer, élaborer une méthode rigoureuse. Ne plus dire « ça se voit sur la figure » mais apporter des arguments, convaincre à partir de ce que l'on sait, des propriétés rencontrées... Situations concrètes pouvant garder un lien avec les autres disciplines. <ul style="list-style-type: none"> ➤ La proportionnalité, <i>Taux de pourcentage en SVT</i> ➤ Les statistiques, <i>Diagrammes en histoire géographique</i> ➤ Des calculs de volumes, d'aires, <i>Lien avec les sciences physiques</i> ➤ Longueurs, masses, durées, <i>On pourra faire un lien avec les autres pays (Grande Bretagne)</i> ➤ Géométrie dans l'espace, ... 	<p>Mise en commun des différentes approches d'un problème (en particulier en géométrie)</p> <p>Présentation de la méthode à utiliser à l'ensemble du groupe.</p>	<p>Entraînement avec des exercices afin que l'ensemble du groupe puisse acquérir une notion.</p> <p>Ateliers en lien avec l'histoire géographique, SVT, les sciences physiques, la technologie, l'anglais.</p>

- Cinquième

Entretien et recherche individuelle	Cours mutuels	Ateliers
<ul style="list-style-type: none"> • Algèbre. Partir d'une activité pour aborder les différentes notions qui sont à acquérir en algèbre. Faire le lien aussi souvent que possible avec d'autres disciplines pour que les élèves puissent voir l'utilité de ce qu'ils doivent savoir faire. On pourra débiter avec des situations concrètes. <i>Exemple : des partages pour les nombres en écriture fractionnaire, des températures pour les nombres relatifs avec les nombres négatifs ...</i> <i>Lien avec la technologie et la géographie lors du travail sur les échelles.</i> • Géométrie. <ul style="list-style-type: none"> ➢ Problèmes de construction afin de s'approprier les différents types de figures. <i>Symétrie centrale, triangles, angles, parallélogrammes ...</i> On pourra introduire les démonstrations en travaillant par thèmes. L'objectif est que les élèves voient l'utilité de ces démonstrations et qu'ils élaborent eux-mêmes la méthode. <ul style="list-style-type: none"> ➢ Montrer que deux droites sont parallèles, <i>Symétrie centrale, angles, parallélogramme, propriétés sur les droites vues en sixième.</i> ➢ Montrer que deux droites sont perpendiculaires, <i>Triangle, parallélogramme, symétrie centrale, propriété sur les droites vues en sixième.</i> ➢ Montrer qu'un point est le milieu d'un segment, <i>Symétrie centrale, parallélogramme.</i> ➢ Calculer la longueur d'un segment, <i>Symétrie centrale, parallélogramme.</i> ➢ Calculer la mesure d'un angle, <i>Angles, triangle.</i> • Situations concrètes. <ul style="list-style-type: none"> ➢ La proportionnalité, ➢ Les statistiques, ➢ Des calculs de volumes, ➢ Géométrie dans l'espace, etc. 	<p>Mise en commun des différentes approches d'un problème (en particulier en géométrie)</p> <p>Présentation de la méthode à utiliser à l'ensemble du groupe.</p>	<p>Entraînement avec des exercices afin que l'ensemble du groupe puisse acquérir une notion.</p> <p>Ateliers en lien avec les sciences physiques, la technologie, les arts plastiques, SVT, la géographie ...</p>

Pour les différents thèmes de géométrie, on pourra avoir recours à des propriétés issues de différents chapitres, ce sera aux élèves de dégager les informations importantes et de voir quels sont les éléments qu'ils n'ont pas encore en leur possession.

- Quatrième

Les objectifs de cette année de quatrième sont l'acquisition de l'ensemble des notions et établir le lien entre les différentes disciplines.

Entretien et recherche individuelle	Cours mutuels	Ateliers
<ul style="list-style-type: none"> • Algèbre Partir d'une activité pour aborder les différentes notions qui sont à acquérir en algèbre. Faire le lien aussi souvent que possible avec d'autres disciplines pour que les élèves puissent voir l'utilité de ce qu'ils doivent savoir faire. <i>Exemples : les puissances sont utilisées en technologie et en sciences physiques (code couleurs avec les résistances), La proportionnalité en sciences physiques (loi d'Ohm), ...</i> • Géométrie On pourra travailler par thèmes et non plus par chapitre en partant de problèmes de construction ou de problèmes dans lesquels il faut faire des démonstrations mais dans lesquelles leurs outils ne suffisent plus. <ul style="list-style-type: none"> ➤ Montrer que deux droites sont parallèles, <i>Droite des milieux, révisions de notions vues dans les années antérieures.</i> ➤ Montrer que deux droites sont perpendiculaires, <i>Réciproque du théorème de Pythagore, triangle inscrit dans un cercle, médiane, tangente à un cercle, révisions de notions vues dans les années antérieures.</i> ➤ Montrer qu'un point est le milieu d'un segment, <i>Droite des milieux, révisions de notions vues dans les années antérieures.</i> ➤ Calculer la longueur d'un segment, <i>Théorèmes de Pythagore, de Thalès, cosinus, droite des milieux, agrandissement et réduction, triangle rectangle et médiane, points situés sur la bissectrice d'un angle.</i> ➤ Calculer la mesure d'un angle, <i>Cosinus, bissectrice, révisions de notions vues dans les années antérieures.</i> ➤ Problèmes de construction. • Situations concrètes Ces situations vont pouvoir traiter un certain nombre de notions : <ul style="list-style-type: none"> ➤ Les statistiques, ➤ Des calculs de volumes, ➤ Géométrie dans l'espace, ... 	<p>Mise en commun des différentes approches d'un problème (en particulier en géométrie)</p> <p>Présentation de la méthode à utiliser à l'ensemble du groupe.</p>	<p>Entraînement avec des exercices afin que l'ensemble du groupe puisse acquérir une notion.</p> <p>Ateliers en lien avec les sciences physiques, la technologie, l'éducation musicale, SVT.</p>

- Troisième

Les objectifs de cette année de troisième sont la validation du socle commun, l'acquisition de l'ensemble des notions nécessaires pour l'obtention du DNB.

Entretien et recherche individuelle	Cours mutuels	Ateliers
<ul style="list-style-type: none"> • Algèbre. Partir d'une activité, d'une situation-problème pour aborder les différentes notions qui sont à acquérir en algèbre. Faire le lien aussi souvent que possible avec d'autres disciplines pour que les élèves puissent voir l'utilité de ce qu'ils doivent savoir faire. • Géométrie. On pourra travailler par thèmes et non plus par chapitre en partant de problèmes de construction ou de problèmes dans lesquels il faut faire des démonstrations, aborder de nouvelles notions, réinvestir l'ensemble de leurs connaissances. <ul style="list-style-type: none"> ➤ Montrer que deux droites sont parallèles, ➤ Montrer que deux droites sont perpendiculaires, ➤ Montrer qu'un point est le milieu d'un segment, ➤ Calculer la longueur d'un segment, ➤ Calculer la mesure d'un angle, • Situations concrètes. Ces situations vont pouvoir traiter un certain nombre de notions : <ul style="list-style-type: none"> ➤ Les statistiques, <p><i>Faire l'analyse des résultats d'une enquête.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Les probabilités, ➤ La notion de fonction, ➤ Les fonctions linéaires, ➤ Les fonctions affines, ➤ Des calculs de volumes, ➤ Géométrie dans l'espace, ➤ PGCD, PPCM, ... 	<p>Mise en commun des différentes approches d'un problème.</p> <p>Présentation de la méthode à utiliser à l'ensemble du groupe.</p>	<p>Entraînement avec des exercices afin que l'ensemble du groupe puisse acquérir une notion.</p> <p>Ateliers en lien avec les sciences physiques, la technologie, l'éducation musicale, SVT, arts plastiques.</p>

2. Thèmes de recherche envisageables et plan de travail (sources : Jean-Paul Closquinet)

Les programmes et leur maîtrise à travers des thèmes de recherche supposent l'élaboration d'un plan de travail sur l'année.

Voici, par exemple, des thèmes explorés au lycée expérimental de Saint-Nazaire (classe de Jean-Paul Closquinet), pour des élèves qui, dans leur grande majorité étaient en échec en mathématiques : « la logique et l'absurde », « Escher et les perspectives loufoques », « La quatrième dimension », « Fini et infini », « Vide et plein », « Corps et espace ».

Sur cette base, il est possible de découper l'année en temps de formation où les thèmes et les parties du programme seront jalonnés en suivant ce principe qu'un thème peut être conservé s'il intègre la partie du programme prévue. Il va de soi que l'ordre peut être interverti si la cohérence de la progression n'en souffre pas.

Y parvenir, suppose de délimiter la durée consacrée aux notions, de prévoir des questions pour être aidé et de prévoir des séances d'explications spécifiques, par exemple en atelier ou en club.

Il est très important que les élèves parlent des mathématiques pour exprimer leurs difficultés, leurs réussites, et leurs interrogations sur leur signification. Il leur faut aussi comprendre, par l'échange, que les conventions et la rigueur dans l'écriture permettent d'être lu en toute clarté.

3. Les possibilités pour trouver des thèmes (sources : Jean-Paul Closquinet, Denis Guedj)

- Observer les rapports entre soi et l'espace.
- Revenir sur les représentations habituelles pour y réfléchir.
- Percevoir le corps comme entité physique agissante où le jeu des forces est sans cesse en prise avec l'environnement.
- Etudier l'histoire des mathématiques où, très souvent, les notions sont élaborées à partir de nécessités pratiques. C'est l'histoire magistrale des dockers de Londres et l'invention des signes plus, moins et égal. Dans les listes qui suivent, des thèmes en lien avec l'histoire ancienne ou récente sont proposés par niveau.

En troisième

Thalès,
les calculateurs prodiges,
cos, sin, tan et astronomie,
physique : la réfraction,
Ptolémée, distances entre les astres,
le nombre d'or $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ proposé par niveau en fonction du programme,
les calculs au XIX^e siècle,
Evariste Galois,
navigation, architecture, création des signes algébriques
histoire de la navigation
historique de la résolution des équations,
Descartes,
Irrationnels, nombres irrationnels pi (trapèze 27) $\sqrt{2}$
le système sexagésimal
l'histoire des nombres
représentation de la Terre en plan
gravitation (avec la physique), monnaies,
histoire du mot fonction,
gammes, nombre d'or,
proportions (Renaissance, Antiquité),
clepsydre, baromètre, histoire du thermomètre,
représentation populaire, minorités.
géodésiques
algèbre arabe
Escher, polygones réguliers
 k, k^2, k^3
sphère : longitude et latitude
agrandissements, réductions
confirmation de la théorie de la gravitation universelle
abeilles, nature et géométrie
premières statistiques : Egypte, Chine ?

En quatrième

inconcevables nombres négatifs, fractions égyptiennes,
l'euro et la parité, vitesses, fusées, lumière,
Thalès, la pyramide, hauteur d'un arbre ou d'une tour,
calcul en écritures anciennes,
Pythagore,
histoire des notations et du calcul,
pourcentages divers statistiques, Incas,
cercle d'Euler,
Euclide, Eléments.

En sixième

origine des nombres, des nombres décimaux,
numération romaine, égyptienne, babylonienne, lunaire,
postulat d'Euclide,
étoiles et astronomie,
architecture,
axe des temps, date de Pâques, longitude et latitude sur cartes, lecture de plans.

4. Le pôle scientifique

Il a déjà été deviné que les mathématiques pouvaient très bien prendre leur place dans l'atelier littéraire. Ce sera, nonobstant, le lieu privilégié d'activités très intégratives comme l'astronomie, par exemple, où interfèrent les mathématiques, la physique, l'instrumentation, la chimie, les sciences de la vie et de la Terre.

Les ateliers techniques pourraient fabriquer le matériel instrumental adéquat ou bien à caractère didactique en facilitant la pratique. Ainsi, un cylindre et un cube peuvent donner une image concrète analysable d'une fonction affine par intervalles : c'est celle que décrit l'évolution du niveau d'eau dans le cylindre si l'on y plonge un cube.

De nombreuses possibilités existent pour montrer que toutes les sciences se rejoignent et qu'il s'agit de systèmes emboîtés : la réalisation d'une station météo, la pratique de la navigation, etc.